DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

OPTION B

Calculatrice autorisée.

Mesures de risque en assurance et en finance

Ce sujet aborde des questions de probabilités relatives à l'assurance, la finance, et la gestion des risques. Néanmoins aucune connaissance dans ces domaines n'est nécessaire pour aborder cette épreuve, et toutes les questions se traitent avec les outils du programme.

Notations et définitions générales

Dans un souci de simplification, nous considérerons tout au long de cette épreuve que X désigne une variable aléatoire **positive ou nulle** représentant une perte potentielle. La fonction de répartition de X sera notée F_X, sa fonction de densité (lorsqu'elle existe) sera notée f_X. Dans toute l'épreuve, pour $A \subset \mathbb{R}$, on notera 1_A la fonction indicatrice de A définie par $1_A(x) = 1$ pour $x \in A$ et $1_A(x) = 0$ sinon. On rappelle que la densité d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ au point $x \in \mathbb{R}$ est donnée par $\lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,+\infty[}(x)$.

1 Quantile ou Value-at-Risk (VaR)

Soit $\alpha \in [0, 1[$. La Value-at-Risk de niveau α de la variable aléatoire X est définie par

$$VaR_\alpha(X) = \inf \{x \in \mathbb{R},\, F_X(x) \geq \alpha\}.$$

1. Dans cette question, supposons que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Donner une expression de $VaR_\alpha(X)$ en fonction de λ et α.
2. Donner la valeur numérique à 10^{-3} près de $VaR_\alpha(X)$ lorsque $X \sim Exp(\lambda)$ avec $\lambda = 2$ et $\alpha = 85\% = \frac{85}{100}$.
3. Donner la valeur numérique à 10^{-3} près de $VaR_\alpha(X + 5)$ lorsque $X \sim Exp(\lambda)$ avec $\lambda = 2$ et $\alpha = 85\%$.
4. Dans cette question, on suppose maintenant que X suit une loi uniforme sur l'ensemble des entiers compris entre 1 et 10 : $P(X = k) = \frac{1}{10}$ pour $k = 1, 2, 3, ..., 10$. Donner la valeur de $VaR_\alpha(X)$ quand $\alpha = 85\%$.
5. Montrer que pour toute variable aléatoire positive ou nulle X et pour tout $\beta > 0$, $VaR_\alpha(\beta X) = \beta VaR_\alpha(X)$.

2 Tail-Value-at-Risk (TVaR)

1. Soit $\alpha \in [0,1[$. La Tail-Value-at-Risk de niveau α de la variable aléatoire X est définie par

$$TVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_q(X)dq.$$

   Montrer que $TVaR_\alpha(X) = E(X)$ pour toute variable aléatoire X intégrable lorsque $\alpha = 0$.

2. A l'aide d'un changement de variable, montrer que pour toute variable aléatoire positive intégrable, pour tout $\alpha \in [0,1[$,

$$TVaR_\alpha(X) = \frac{E\left(X1_{\{X>VaR_\alpha(X)\}}\right) + VaR_\alpha(X)\left[P\left(X \leq VaR_\alpha(X)\right) - \alpha\right]}{1-\alpha}.$$

3. Montrer que lorsque F_X est continue, $TVaR_\alpha(X) = E(X|X > VaR_\alpha(X))$.

4. Dans cette question, supposons que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Donner une expression de $TVaR_\alpha(X)$ en fonction de λ et α.

5. Donner la valeur numérique à 10^{-3} près de $TVaR_\alpha(X)$ lorsque $X \sim Exp(\lambda)$ avec $\lambda = 2$ et $\alpha = 85\%$.

6. Donner la valeur numérique à 10^{-3} près de $TVaR_\alpha(X+5)$ lorsque $X \sim Exp(\lambda)$ avec $\lambda = 2$ et $\alpha = 85\%$.

7. Dans cette question, on suppose maintenant que X suit une loi uniforme sur l'ensemble des entiers compris entre 1 et 10 : $P(X = k) = \frac{1}{10}$ pour $k = 1, 2, 3, ..., 10$. Donner la valeur de $TVaR_\alpha(X)$ quand $\alpha = 85\%$.

8. Montrer que pour toute variable aléatoire positive ou nulle X et pour tout $\beta > 0$, $TVaR_\alpha(\beta X) = \beta TVaR_\alpha(X)$.

3 Mesures de distorsion

1. Soit g une fonction croissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$, dérivable à droite sur $[0,1[$, admettant une limite à gauche (notée $g(x^-)$) en tout x dans $]0,1]$, dérivable à gauche en 1, telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$, et avec

un nombre fini de points de discontinuité. On définit alors la mesure de risque (appelée mesure de distorsion) ρ_g par

$$\rho_g(X) = \int_0^{+\infty} g(P(X > x))dx$$

pour toute variable aléatoire X positive ou nulle telle que l'intégrale soit finie. Montrer que $\rho_g(X) = E(X)$ lorsque g est la fonction identité.

2. On admettra le résultat suivant, qu'on pourrait obtenir avec un changement de variable :

$$\rho_g(X) = \int_0^1 VaR_{1-\alpha}(X)dg(\alpha).$$

Cette dernière intégrale doit se comprendre dans le cadre présent comme

$$\rho_g(X) = \int_0^1 VaR_{1-\alpha}(X)g'_d(\alpha)d\alpha + \sum_{k=1}^{n}(g(a_k) - g(a_k^-))VaR_{1-a_k}(X),$$

où $a_1, \ldots, a_n$ sont les points de discontinuité de g, où $g'_d(x)$ est la dérivée à droite de g au point $x \in [0,1[$, et où $g'_d(1)$ est la dérivée à gauche de g en 1. Soit g_γ définie par $g_\gamma(\alpha) = 1_{[\gamma,1]}(\alpha)$, où $0 < \gamma < 1$. Déterminer la mesure de risque définie par ρ_{g_γ} dans ce cas-là.

3. Soit X de loi donnée par $P(X = 100) = P(X = 1) = \frac{3}{100}$ et $P(X = 0) = \frac{94}{100}$. Déterminer $VaR_{95\%}(X)$.

4. Déterminer $TVaR_{95\%}(X)$.

5. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X et de même loi. Donner la loi de $X + Y$.

6. Calculer $VaR_{95\%}(X + Y)$.

7. Calculer $TVaR_{95\%}(X + Y)$.

8. Dans cette question ainsi que dans les deux suivantes, on suppose $\gamma \in]0, 1[$ fixé. Une mesure de risque ρ est dite sous-additive si pour toutes variables aléatoires positives ou nulles X et Y, on a

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

On pourra utiliser le résultat suivant : une mesure de distorsion ρ_g est sous-additive si et seulement si g est concave. ρ_{g_γ} est-elle sous-additive ?

9. Déterminer la plus petite fonction $\tilde{g}_\gamma$ croissante concave de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telle que $\tilde{g}_\gamma(0) = 0$, $\tilde{g}_\gamma(1) = 1$ et $\tilde{g}_\gamma(\alpha) \geq g_\gamma(\alpha)$ pour tout $\alpha \in [0,1]$.
10. En déduire que la Tail-Value-at-Risk de niveau γ est la plus petite mesure de distorsion sous-additive supérieure à la Value-at-Risk de niveau γ.
11. Soit g maintenant définie par $g(\alpha) = \frac{3}{4}.1_{[\delta,1]}(\alpha) + \frac{1}{4}.1_{[\xi,1]}(\alpha)$, où $\delta = \frac{3}{4}$ et $\xi = \frac{17}{20}$. Donner la valeur numérique à 10^{-3} près de $\rho_g(X)$ lorsque $X \sim Exp(\lambda)$ avec $\lambda = 2$.
12. Donner la valeur numérique à 10^{-3} près de $\rho_g(X)$ lorsque X suit une loi uniforme sur l'ensemble des entiers compris entre 1 et 10 : $P(X = k) = \frac{1}{10}$ pour $k = 1, 2, 3, ..., 10$.
13. ρ_g est-elle sous-additive ?